

# CNC Sistem Tasarımı Bölüm I: Mikro Eğriler ile Sarsıntı Limitli Takım Yolu Oluşturulması

## CNC System Design Part I: Jerk Limited Trajectory Generation with Micro Splines

Alican Kahraman<sup>1</sup>, Enes Demir<sup>2</sup>, S. Çağlar Başlamışlı<sup>3</sup>, Barış Doğan<sup>4</sup>, Onur Tunçer<sup>5</sup>, Yusuf Altıntaş<sup>6</sup>

<sup>1</sup>Ar-Ge Departmanı  
Versus Mühendislik A.Ş., Ankara  
alicankahraman0@gmail.com

<sup>2</sup>Ar-Ge Departmanı  
Milteksan A.Ş., İstanbul  
enes.demir@milteksan.com

<sup>3</sup>Makine Mühendisliği Bölümü  
Hacettepe Üniversitesi, Ankara  
scaglarb@hacettepe.edu.tr

<sup>4</sup>Mekatronik Mühendisliği Bölümü  
Marmara Üniversitesi, İstanbul  
baris@marmara.edu.tr

<sup>5</sup>Uçak Mühendisliği Bölümü  
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul  
tuncero@itu.edu.tr

<sup>6</sup>Makine Mühendisliği Bölümü  
The University of British Columbia, Vancouver  
altintas@mech.ubc.ca

### Abstract

### Özetçe

Takım tezgahlarında parçaların hassas işlenebilmesi için kesici takım yolu oluşturulması kritik öneme sahiptir. Oluşturulan takım yolu, tezgahın ve servo motor sisteminin doğal frekanslarını tetikleyebilir ve hassas işlemeye engel olabilir. Bu nedenle oluşturulan takım yolu sadece istenilen yörüngeyi değil, devamlılığı da verebilmelidir. Ardışık segmentlerin birleşim noktalarında hız ve ivme sürekliliği sağlanmazsa doğal frekansların tetiklenmesi olağandır. Bu çalışmada geliştirilmiş olan takım yolu algoritması, servo motor kontrol döngüsü zamanında çalışarak doğrusal ve dairesel enterpolasyon yapabilmektedir. Ayrıca algoritma, doğrusal ve dairesel fark etmeksizin, ardışık segmentler arası mikro eğriler oluşturularak  $C^2$  süreklilik sağlamaktadır. Bu durum segmentler arası hızlı, yumuşak geçişe olanak tanımaktadır. Takım yolu algoritmasında segmentler arası geçiş bölgelerinde kullanılan mikro eğriler, ivme ve sarsıntı değerleri sınırlandırılmış beşinci derece polinom kullanılarak oluşturulmaktadır. Geçiş bölgeleri dışında oluşturulan dairesel ya da doğrusal takım yolları ise, sarsıntı limitli trapez ivme profili ile oluşturulmaktadır. Geliştirilen algoritma, 3 eksen köprü tipi freze tezgahında yıldız profili çizdirilerek denenmiş ve çizim sonuçları irdelenmiştir.

Cutting tool trajectory generation is critical in precision machining of workpiece on machine tools. The generated tool path can trigger the natural frequencies of the machine tool and servo motor system and interfere with precision machining. Therefore, the generated tool path should not only give the desired path, but also the required continuity. It is usual for natural frequencies to be triggered if velocity and acceleration continuity is not maintained at the junction of consecutive segments. The tool path algorithm developed in this study can perform linear and circular interpolation by operating at the time of the servo motor control loop. In addition, the algorithm provides  $C^2$  continuity by generating micro-curves between consecutive segments, regardless of linear or circular. This allows rapid and smooth transition between segments. Micro curves used in the transition regions between segments in the tool path algorithm are created using a fifth degree polynomial with limited acceleration and jerk. Circular and linear tool paths generated outside the transition zones are generated with a trapezoidal acceleration profile with jerk limit. The developed algorithm was tested by cutting a star profile on a 3-axis Gantry type milling machine and the machining results were examined.

### 1. Giriş

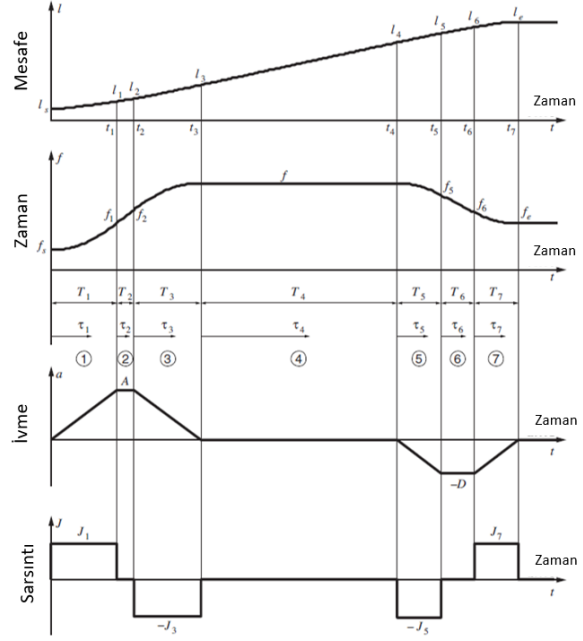
Günümüzdeki CNC takım tezgahlarında talaşlı imalat öncesinde bilgisayar destekli üretim yöntemleriyle kesilecek parçanın planı yapılmaktadır. Bu planda, takım yolunun gideceği nü-

merik kontrol blokları G00, G01, G02, G03 gibi temel G kodlarıyla temsil edilmektedir. G01 kodunda iki nokta arasında her eksen senkron halde doğrusal enterpolasyon yapılmaktadır. G02 ve G03 kodlarında belli yarıçap, başlangıç ve merkez noktasına göre iki yönde de dairesel enterpolasyon yapılmaktadır. Bu enterpolasyonlarda takım yolunun hız, ivme ve sarsıntı profilleri takım tezgahının ve servo kontrol sisteminin dinamikleri açısından oldukça kritiktir. Buna göre kesici takımın hızlanma ve ivmelenme profili frekans içeriğini belirler ve doğrudan işleme hassasiyetini etkiler. Takım yolu oluşturulması sonucunda sürekli ilerleme hareketinde süreksizlikler oluşabilir. İki doğrusal blok arasında, doğru ile daire arasında ve daire ile daire blokları arasındaki sivri köşeler, sürekli hareket sonucunda süreksizlik meydana getirir ve tezgahın az sönümlü yapısal modlarını tetikleyebilir. Bu yüzden doğru ve daire blokları arasında yumuşak, sürekli ve sarsıntısız bir yol oluşturulmalıdır. Aksi takdirde işleme esnasında titreme oluşabilir ve bu da konumlama hatalarına yol açabilir [1]. Bu alanda farklı yaklaşımlarla çalışmalarda bulunulmuştur [2][3][4]. Bu çalışmalarda tüm hareket boyunca eğri enterpolasyonu gerçekleştiren algoritmaların yanı sıra sadece keskin köşelere eğriler uyduran algoritmalar da geliştirilmiştir. Altıntaş ve Sun [5] beş eksen CNC için geçiş bölgelerinde Bezier eğrileri ile G3 süreklilik sağlamıştır. Yang [4] çalışmasında doğrusal segmentler arası geçişlerde NURBS eğrileri kullanarak takım yolunu oluşturmuştur. Erkorkmaz ve Altıntaş tarafından yapılan çalışmada takım yolu, sarsıntı limitli (trapez ivme profili) besleme ile oluşturulmuştur [1]. Sencer tarafından yapılan çalışmada segment geçişleri, Bezier eğrileri ile oluşturularak süreklilik sağlanmıştır. Bu çalışmada segment birleşim noktalarında beşinci derece polinom ile mikro eğriler oluşturularak süreklilik sağlanmıştır. Bölüm 3'te mikro eğriler detaylandırılmaktadır. Bölüm 2'de ise segment geçiş bölgeleri dışında, doğrusal ve dairesel enterpolasyon methodunda kullanılan sarsıntı limitli trapez ivme profilini anlatılmaktadır. Bölüm 4'te ise oluşturulan algoritma ile yıldız profilinin referans takım yolu oluşturulmuş ve 3 eksen tezgahda deney yapılmıştır. Bu çalışma ile, geliştirilecek olan 3 eksen CNC için referans takım yolu oluşturulurken, köşe noktalar beşinci derece eğriler ile yumuşatılarak sürekli bir besleme hareketi sağlanıp daha iyi yüzey geometrisi ve daha kısa işleme süresi sağlanmaktadır.

## 2. Referans Takım Yolunun Oluşturulması

Bu çalışmada 5. derece eğriler ile, keskin geçişlerde, yüksek hızı anlık olarak azaltmak geçişten sonra ise segmentin içerisinde tekrar yüksek hıza çıkmak amaçlanmaktadır. Ayrıca pozisyon, hız ve ivmede süreklilik için geçiş bölgeleri dışında sarsıntı limitli trapez ivme profili kullanılmıştır. Şekil 1'de gösterildiği gibi, genel bir ikinci derece olan hız profilini sarsıntı limitli bir hareket profili, üç hızlanma bölgesi (1)-(3), sabit hız bölgesi (4) ve ardışık yavaşlama bölgeleri (5)-(7)den oluşan yedi faza sahiptir. T1, T2 ve T3 zaman aralıklarında, besleme hareketi başlangıç beslemesinden ( $f_s$ ) istenen seyir beslemesine (F) hızlanır. T4 süresi boyunca sabit besleme hızında hareket eder. Son olarak, T5, T6 ve T7 süreleri içinde, bitiş besleme değerine,  $f_e$ 'ye ulaşmak için hız düşer. Hızdaki geçişler belirlenen hızlanma, yavaşlama ve sarsıntı büyüklükleri sırasıyla  $A_{max} = D_{max}$ ,  $J_{max}$  ile analitik olarak yapılmaktadır. J sarsıntısını temsil etmektedir ve Denklem 1'deki gibi sabittir. İvme

doğrusal olarak değişmektedir.



Şekil 1: Sarsıntı limitli trapez ivme hareketinin kinematik profili [1]

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \leq t < t_1 \\ 0 & t_1 \leq t < t_2 \\ -J_3 & t_2 \leq t < t_3 \\ 0 & t_3 \leq t < t_4 \\ -J_5 & t_4 \leq t < t_5 \\ 0 & t_5 \leq t < t_6 \\ J_7 & t_6 \leq t < t_7 \end{pmatrix} \quad (1)$$

İvme hız ve pozisyon, Denklem 2'de gösterildiği gibi sarsıntının integrali alınarak bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_i) + \int_{t_i}^t J(\tau) d\tau \\ f(t) &= f(t_i) + \int_{t_i}^t a(\tau) d\tau \\ l(t) &= l(t_i) + \int_{t_i}^t f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2)$$

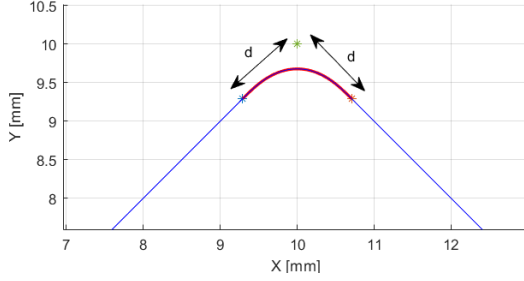
Denklem 3'de, Denklem 2'deki integrallerin sonucu gösterilmektedir.

$$l(\tau) = \begin{cases} l_1 = l_s + f_s \tau_1 + \frac{1}{6} J_1 \tau_1^3 & 0 \leq t < t_1 \\ l_2 = l_1 + f_1 \tau_2 + \frac{1}{2} A \tau_2^2 & t_1 \leq t < t_2 \\ l_3 = l_2 + f_2 \tau_3 + \frac{1}{2} A \tau_3^2 - \frac{1}{6} J_3 \tau_3^3 & t_2 \leq t < t_3 \\ l_4 = l_3 + f_3 \tau_4 & t_3 \leq t < t_4 \\ l_5 = l_4 + f_4 \tau_5 - \frac{1}{6} J_5 \tau_5^3 & t_4 \leq t < t_5 \\ l_6 = l_5 + f_5 \tau_6 - \frac{1}{2} D \tau_6^2 & t_5 \leq t < t_6 \\ l_7 = l_6 + f_6 \tau_7 - \frac{1}{2} D \tau_7^2 - \frac{1}{6} J_7 \tau_7^3 & t_6 \leq t < t_7 \end{cases} \quad (3)$$

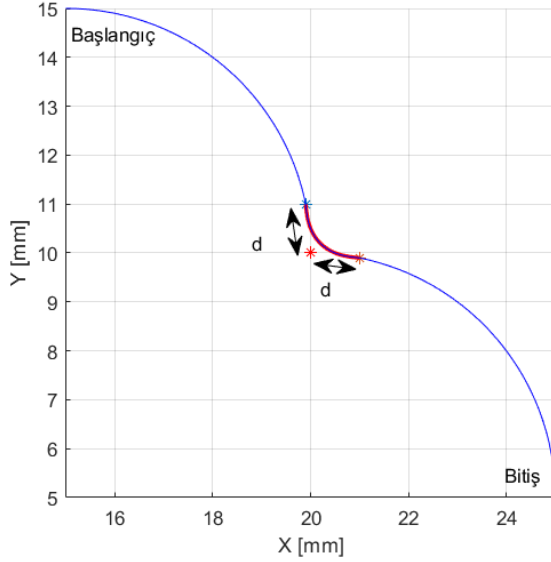
Yukarıdaki denklemler hesaplanarak her bir faz geçişinde olması gereken pozisyon, hız ve faz zamanları bulunmaktadır. Sonrasında servo zamanına göre enterpolasyon yapılarak sarsıntı limitli takım yolu oluşturulmaktadır. Detaylı analitik ifadeler Erkorkmaz ve Altıntaş tarafından yapılan çalışmada bulunabilir [1].

### 3. Mikro Eğriler ile Takım Yolu Birleştirme

Takım yolundaki keskin geçişleri yumuşatarak hız ve ivme sürekliliği sağlanması ve sarsıntı limitlemek için 5. derece polinom eğrileri kullanılmıştır. Uzayda tanımlanan eğri başlangıç ve bitiş noktaları geçiş noktasından dönme toleransı ( $d$ ) kadar uzaklaşarak (bkz. Şekil 2 ve 3), bu üç noktanın oluşturduğu düzlemde, enterpolasyon zamanına göre, X ve Y ekseninde, ayrı ayrı, eğri denklemleri hesaplanmıştır (bkz. Denklem 4 ve 5). Daha sonra, bir rotasyon matrisi ile 3 boyuta çıkarılmaktadır.



Şekil 2: İki doğru arası geçiş



Şekil 3: İki dairesel segment arası geçiş

Eğri başlangıç, bitiş ve geçiş noktalarının oluşturduğu düzlemdeki 5. derece polinom eğrileri:

$$x = a_x \tau^5 + b_x \tau^4 + c_x \tau^3 + d_x \tau^2 + e_x \tau + f_x \quad (4)$$

$$y = a_y \tau^5 + b_y \tau^4 + c_y \tau^3 + d_y \tau^2 + e_y \tau + f_y \quad (5)$$

Eğri başlangıç ve bitiş noktalarında pozisyon, hız ve ivme sürekliliği için aşağıdaki altı adet başlangıç koşulu verilmiştir.

$\tau = 0$  anında:

$q0_x$  = eğri başlangıç pozisyonu,

$v0_x$  = eğri başlangıç hızı,

$a0_x$  = eğri başlangıç ivmesi

$\tau = 1$  anında:

$q1_x$  = eğri bitiş pozisyonu,

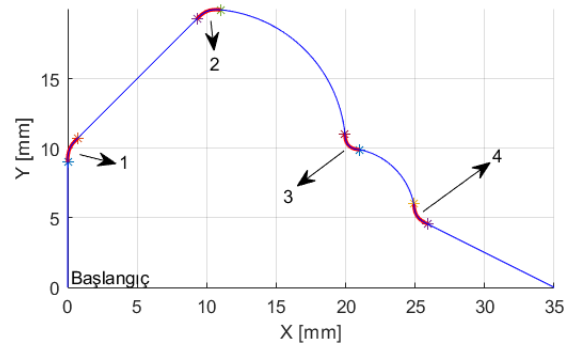
$v1_x$  = eğri bitiş hızı,

$a1_x$  = eğri bitiş ivmesi

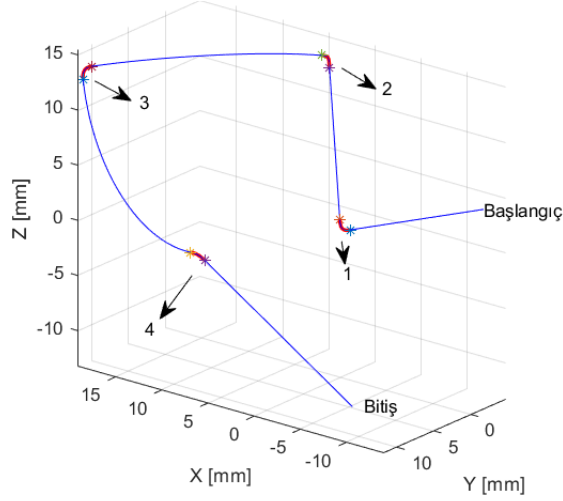
Bu koşullar altında Denklem 6'daki matris oluşturulup, parametrik bir şekilde çözdürülerek, 5. derece polinomun katsayıları bulunmuştur.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \\ e_x \\ f_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q0_x \\ q1_x \\ v0_x \\ v1_x \\ a0_x \\ a1_x \end{bmatrix} \quad (6)$$

Daha sonra türevleri alınarak hız, ivme ve sarsıntı denklemleri elde edilmiştir. Aynı yöntem ile y eksenindeki zamana bağlı denklemler elde edilmektedir. Eğri başlangıç ve bitiş noktaları segmentin doğrusal yada dairesel olmasına göre hesaplanmaktadır. Dairesel bir segmentte, aynı düzlemde, merkezi köşe (geçiş) noktası olan  $d$  yarıçaplı daire ile dairesel segmentin kesiştiği nokta eğri başlangıç/bitiş noktası olarak alınmaktadır. Belirlenen başlangıç ve bitiş noktası arasına bir çok eğri yerleştirilebilmektedir. Bu eğrilerden, eğri başlangıç, bitiş ve geçiş noktasının oluşturduğu üçgenel alan içerisinde kalan, makine ivme ve sarsıntı limitlerine uygun olanı iterasyon ile seçilmektedir.



Şekil 4: Farklı segment geçişlerinin eğri ile birleştirilmesi - 2 boyutta



Şekil 5: Farklı segment geçişlerinin eğri ile birleştirilmesi - 3 boyutta

### 3.1. Hız optimizasyonu ve maksimum eğri hızı

Segment geçiş bölgelerinde, elde edilen 5. derece eğri denklemine başlangıç hız koşulu yüksek verilmesi durumunda ivme ve sarsıntı limitleri dahilinde, hız yeterince düşürülemez ve uygun eğri bulamama durumu söz konusudur. Bu durumu ortadan kaldırmak için eğri başlangıç ve bitiş noktası hesaplandıktan sonra iterasyonla maksimum eğri başlangıç ve bitiş hızları belirlenmektedir. Daha sonra düz bölgelerdeki sarsıntı limitli hız profili ile oluşturulan hız profilindeki besleme bitiş hızı ( $f_{e_i}$ ) maksimum eğri başlangıç hızına ( $v_0$ ) ve bir sonraki segmentin başlama hızı ( $f_{s_{i+1}}$ ) maksimum eğri bitiş hızına ( $v_1$ ) eşitlenerek hızda süreklilik sağlanmaktadır.

$$f_{e_i} = v_0 \quad (7)$$

$$f_{s_{i+1}} = v_1 \quad (8)$$

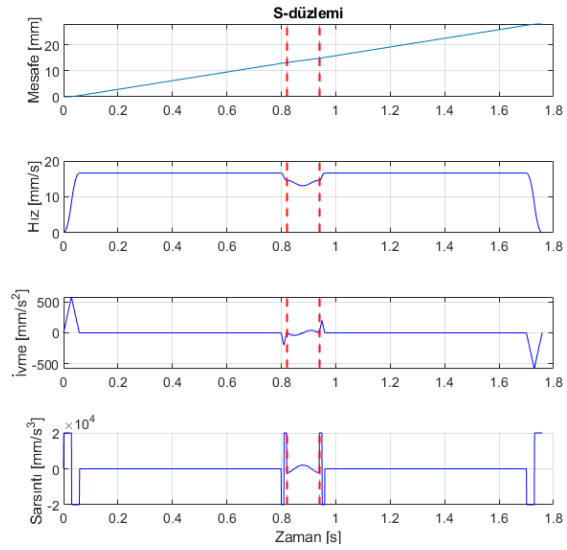
İvmeye süreklilik sağlanması için eğri başlangıç ve bitiş ivmelerinin segment tipine göre seçilmesi gerekmektedir. Eğri ivme başlangıç koşulları doğrusal segmentlerde 0 olarak alınmaktadır. Dairesel segmentlerde ise merkezci ivmenin etkisi eklenmektedir. Tablo 1'de farklı geçiş durumlarında olması gereken ivmeler verilmektedir. Şekil 4 ve 5'de Tablo 1'deki sırasıyla farklı geçişler iki ve üç boyutta gösterilmektedir. Üç boyutlu durumlarda eğrinin oluşturulduğu düzlem ile dairenin düzlemi farklı olduğundan ivme ve hız vektörlerinin izdüşümü kullanılmaktadır.

Şekil 6'da, Şekil 2'de gösterilen iki doğrunun eğri ile birleştirildiği takım yolu güzergahının kinematik profili gösterilmektedir. Besleme hızı ( $F$ ) ilk olarak 0.8 s'de 0.82 s'e kadar sarsıntı limitli trapez ivme profili ile daha önce hesaplanan maksimum eğri hızına düşürülmüştür. Sonrasında kırmızı kesik çizgiler ile belirtilen alan içerisinde 5. dereceden eğri ile geçiş süreci gerçekleştirilmiştir.

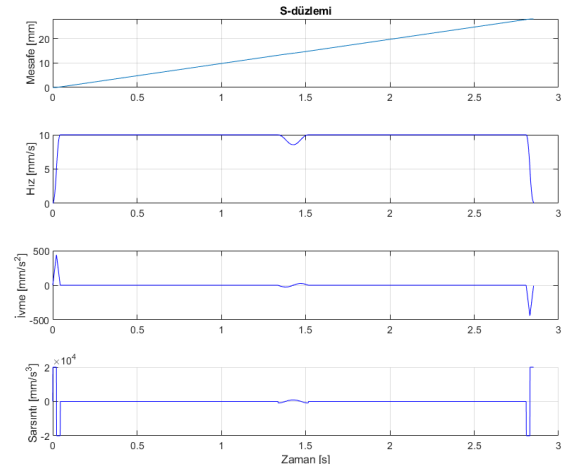
Şekil 7'de ise hız optimizasyonuna gerek olmadan verilen makine limitleri dahilinde oluşturulan takım yolu gösterilmektedir. Şekil 6'da verilen besleme hızı 10 mm/s'ye düşürülerek bu durum çalıştırılmıştır.

Tablo 1: Eğri ivme başlangıç koşulları

Segment tiplerine göre eğri başlangıç ve bitiş ivmeleri				
	Köşe noktadan önceki segment	Köşe noktadan sonraki segment	Başlangıç ivmesi $a_{0x}$	Bitiş ivmesi $a_{1x}$
1	Doğru	Doğru	0	0
2	Doğru	Daire	0	$v_1^2/R$
3	Daire	Daire	$v_0^2/R$	$v_1^2/R$
4	Daire	Doğru	$v_0^2/R$	0



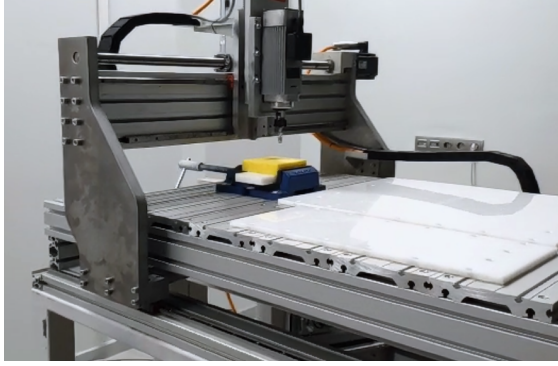
Şekil 6: İki doğrusal segmentin birleştirildiği örnek kinematik profil-1



Şekil 7: İki doğrusal segmentin birleştirildiği örnek kinematik profil-2

## 4. Benzetim ve Deneysel Sonuçları

Deneyde, MİLTEKSAN A.Ş. tarafından inşa edilen üç eksen köprü tipi freze tezgahı kullanılmıştır (bkz. Şekil 8). Bu test donanımı çoğunlukla alüminyum profillerden oluşmaktadır. İşlenecek parçanın sabitlendiği masa, soğuk çekme alüminyum profillerden oluşmaktadır. Eksenler, AC senkronize servo motorlarla tahrik edilmektedir. Motorların durma torkları 2.37 Nm'dir. Motor milleri, kaplinlerle 5 mm hatveli bilyalı vidalara bağlanmıştır.



Şekil 8: 3 eksen test tezgahı

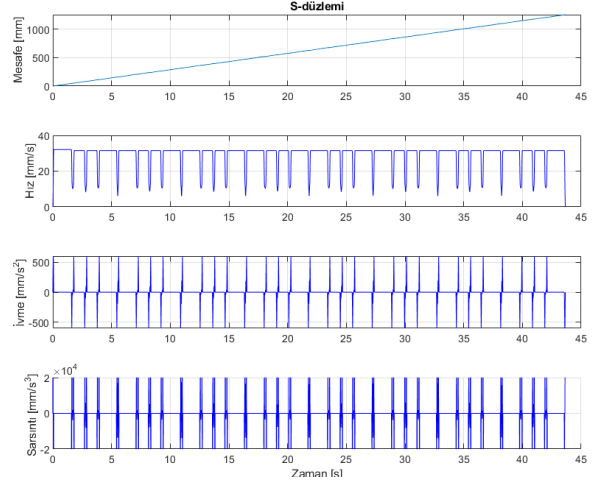
### 4.1. Yıldız Çizim Testi

Doğrusal segmentlerden oluşan yıldızın köşe noktalarında 3 farklı açı oluşmaktadır. Bu geçişlere  $d = 1 \text{ mm}$  tolerans ile sarsıntı limitli 5. dereceden polinom ile eğri oluşturulmuştur.  $A_{max} = D_{max} = 600 \text{ mm/s}^2$  ve  $J_{max} = 20000 \text{ mm/s}^3$  olacak şekilde limitlenmiştir. Her segmentin hızı 32 mm/s olarak eşit verilmiştir.

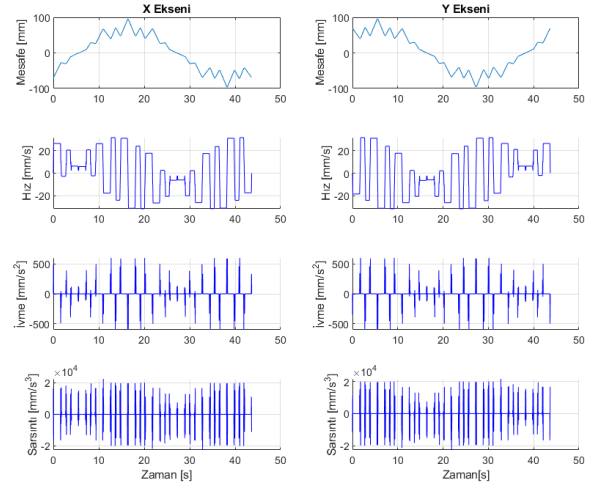
Şekil 11'de sarsıntı limitli mikro eğriler ile birleştirilmiş referans takım yolu güzergahı gösterilmektedir. Eğri başlangıç ve bitiş noktaları yıldız ile gösterilmiştir. Şekil 9'da ise sarsıntı limitli oluşturulan takım yolu güzergahının kinematik profili gösterilmektedir. Verilen ivme ve sarsıntı limitlerine uygun bir şekilde güzergahın oluşturulduğu, geçiş noktalarında eğriler ile hızın düşürüldüğü görülmektedir.

Şekil 10'da ise sarsıntı limitli oluşturulan takım yolu güzergahının aksel kinematik profili gösterilmektedir. Her bir eksen için verilen ivme ve sarsıntı limitlerine uygun bir şekilde güzergahın oluşturulduğu görülmektedir.

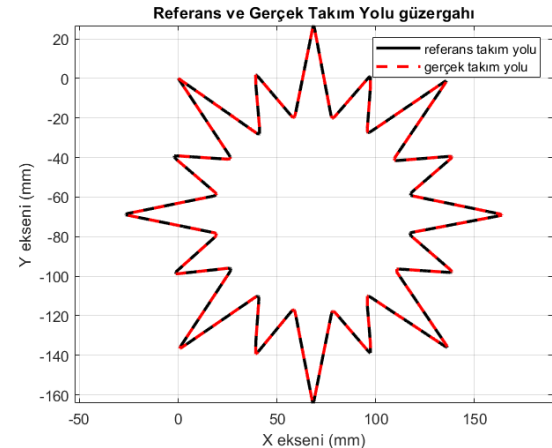
Yıldız şekli için oluşturulan güzergah, kompanzasyonu bulunmayan ve kontrolcü parametreleri ayarlanmamış tezgahta boş yükte test edilmiştir. Şekil 11'de referans güzergah ve motorun döner enkoderinden alınmış güzergah üst üste çizdirilmiştir. Şekil 12'de ise geçiş noktasına yakınlştırılmış şekil bulunmaktadır.



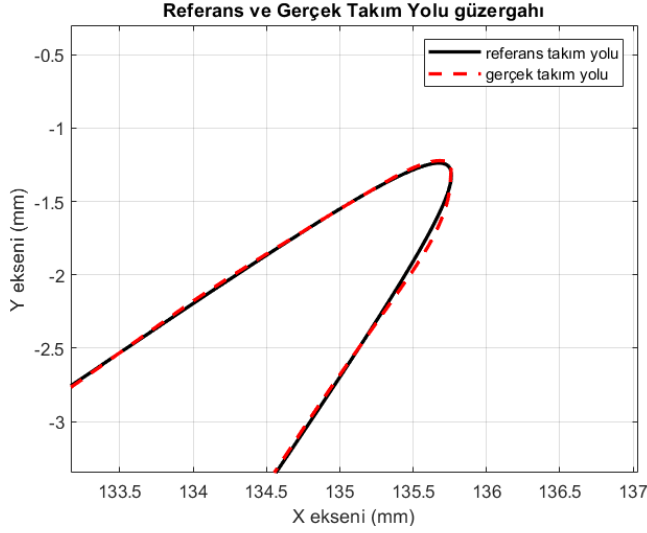
Şekil 9: Yıldız Çizim Testi Kinematik profil



Şekil 10: Yıldız Çizim Testi Aksel Kinematik profil



Şekil 11: Yıldız Çizim Testi referans ve ölçülen takım yolu



Şekil 12: Yıldız Çizim Testi referans ve ölçülen takım yolu (Yakınlaştırılmış)

Yıldız çizim deneyi sonucunda her iki ekseninde 10 mikrometre civarında takip hatası yapılmıştır. Hata, motorun döner enkoderinden alınan verilerle hesaplanmıştır. Ölçülen takım yolunda köşe dönüşünden sonra bir miktar referanstan ayrılma (aşma) görülmüştür. Kontrol algoritmasına, bu çalışmada hesaplanan hız, hız ileri beslemesi olarak dahil edilip daha hassas pozisyonlama mümkün kılınmıştır.

## 5. Sonuçlar ve Tartışma

Bu çalışmada, sürekli besleme hareketi için doğrusal ve dairesel segmentler mikro eğriler ile birleştirilmiştir. Doğrusal ve dairesel segmentlerde sarsıntı limitli trapez ivme profili kullanılmıştır. Mikro eğrilerde ise 5. dereceden polinom sarsıntı ve ivmeler limitlenerek kullanılmıştır. İstenilen tolerans değerinde köşe noktadan uzaklaşarak daha hızlı ve yumuşak referans takım yolu güzergahı oluşturulmuştur. Sürücü (kontrolcü) parametrelerinin ayarlanması, tezgahın rezonans frekanslarına göre çentik filtresi tasarlanması ve sürtünme katsayıları tespit edilip sürtünme kompanzasyonu yapılması işlemlerinden sonra referans takip hatası daha da düşürülecektir.

## 6. Teşekkür

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 3210224 numaralı "5 Eksen Yeni Nesil CNC Kontrol Sistemi ve Dijital İkiz Platformu Geliştirilmesi" başlıklı proje kapsamında desteklenmiştir. Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na teşekkürü borç biliriz.

## 7. Kaynakça

[1] K. Erkorkmaz and Y. Altintas, "High speed CNC system design. Part I: jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 41, no. 9, pp. 1323-1345,

2001.

- [2] B. Sencer, K. Ishizaki and E. Shamoto, "A curvature optimal sharp corner smoothing algorithm for high-speed feed motion generation of NC systems along linear tool paths", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 76, no. 9-12, pp. 1977-1992, 2014.
- [3] F. Wang and D. Yang, "Nearly arc-length parameterized quintic-spline interpolation for precision machining", *Computer-Aided Design*, vol. 25, no. 5, pp. 281-288, 1993.
- [4] J. Yang, L. Zhang and G. Liu, "Linear interpolation algorithm of machining tool path with curvature smoothing", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, p. 095440622210854, 2022.
- [5] S. Sun and Y. Altintas, "A G3 continuous tool path smoothing method for 5-axis CNC machining", *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, vol. 32, pp. 529-549, 2021.